



导学案

主编 肖德好

全品

学练考

高中数学

选择性必修第二册 RJB

细分课时

分层设计

落实基础

突出重点

目录 Contents

03 第三章 排列、组合与二项式定理

PART THREE

3.1 排列与组合	导 091
3.1.1 基本计数原理	导 091
第 1 课时 两个计数原理的简单应用	导 091
第 2 课时 基本计数原理的应用	导 094
3.1.2 排列与排列数	导 096
第 1 课时 排列与排列数	导 096
第 2 课时 排列数的应用	导 098
3.1.3 组合与组合数	导 101
第 1 课时 组合与组合数及其性质应用	导 101
第 2 课时 组合数的综合应用	导 104
3.2 数学探究活动：生日悖论的解释与模拟	导 106
3.3 二项式定理与杨辉三角	导 108
第 1 课时 二项式定理	导 108
第 2 课时 二项式系数的性质与杨辉三角	导 110
第 3 课时 二项式定理的应用	导 112
本章总结提升	导 113

04 第四章 概率与统计

PART FOUR

4.1 条件概率与事件的独立性	导 117
4.1.1 条件概率	导 117
4.1.2 乘法公式与全概率公式	导 119
4.1.3 独立性与条件概率的关系	导 122

4.2 随机变量	导 125
4.2.1 随机变量及其与事件的联系	导 125
4.2.2 离散型随机变量的分布列	导 128
4.2.3 二项分布与超几何分布	导 131
第 1 课时 n 次独立重复试验与二项分布	导 131
第 2 课时 超几何分布	导 134
4.2.4 随机变量的数字特征	导 137
第 1 课时 离散型随机变量的均值	导 137
第 2 课时 离散型随机变量的方差	导 140
4.2.5 正态分布	导 143
4.3 统计模型	导 146
4.3.1 一元线性回归模型	导 146
第 1 课时 相关关系与回归直线方程	导 146
第 2 课时 相关系数与非线性回归	导 150
4.3.2 独立性检验	导 155
4.4 数学探究活动：了解高考选考科目的确定是否与性别有关	导 158
④ 本章总结提升	导 160
◆ 参考答案	导 169

(2)[2024·山东烟台高二期末]我国古代十进制算筹记数法是世界数学史上一个伟大的创造.算筹一般为小圆棍,算筹计数法的表示方法为:个位用纵式,十位用横式,百位再用纵式,千位再用横式,以此类推;遇零则置空.纵式和横式对应数字的算筹表示如下表所示,例如:62记为“ $\perp\parallel$ ”.现用4根算筹表示一个两位数,则表示的数字为质数的个数为 ()

数字	1	2	3	4	5	6	7	8	9
纵式						\perp	$\perp\perp$	$\perp\perp\perp$	$\perp\perp\perp\perp$
横式	—	==	===	====	=====	\perp	$\perp\perp$	$\perp\perp\perp$	$\perp\perp\perp\perp$

A. 4 B. 6 C. 8 D. 10

[素养小结]

(1)分类标准是运用分类加法计数原理的难点所在,应抓住题目中的关键词、关键对象、关键位置,恰当地选择一个分类标准.

(2)分类时应注意完成这件事情的任何一种方法必须属于某一类,并且分别属于不同种类的两种方法是不同的方法,不能重复.

(3)分类时除了不能交叉重复外,还不能有遗漏.

◆ 探究点二 分步乘法计数原理的应用

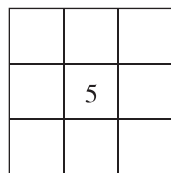
例 2 (1)[2024·甘肃白银高二期末]星期二下午的3节课排物理、化学和自习各一节,要求第一节不排自习,那么不同的排课方法的种数为_____.(用数字作答)

(2)[2024·辽宁盘锦辽东湾高中高二月考]从1,2,3三个数中取一个数作分子,从4,5,6,7四个数中取一个数作分母,组成一个分数,这样能组成多少个值不相等的分数?写出这些分数.

变式 (1)已知集合 $A = \{-1, 0, 1\}$, 集合 $B = \{0, 1, 2, 3\}$, 定义 $A * B = \{(x, y) | x \in A \cap B, y \in A \cup B\}$, 则 $A * B$ 中元素的个数是 ()

A. 7 B. 10
C. 2^5 D. 5^2

(2)[2023·沈阳高二期末]“数独九宫格”的原创者是18世纪的瑞士数学家欧拉,它的游戏规则很简单,将1到9这九个自然数填到如图所示的小九宫格的9个空格里,每个空格填一个数,且9个空格的数字各不相同.若中间空格已填数字5,且只填第二行和第二列,并要求第二行从左至右及第二列从上至下所填的数字都是从小到大排列的,则不同的填法种数为 ()



A. 72 B. 108
C. 144 D. 196

[素养小结]

(1)利用分步乘法计数原理解决问题要按事件发生的过程合理分步,即分步是有先后顺序的,并且分步必须满足:完成一件事的各个步骤是相互依存的,只有各个步骤都完成了,这件事才算完成.

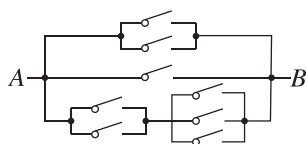
(2)分步必须满足两个条件:一是步骤互相独立,互不干扰;二是步与步确保连续,逐步完成.

◆ 探究点三 两个计数原理的综合应用

例 3 高三年级的四个班到甲、乙、丙、丁、戊五个工厂进行社会实践,其中甲工厂必须有班级去,每班去哪个工厂可自由选择,则不同的分配方案有 ()

A. 360种 B. 420种
C. 369种 D. 396种

变式 (1)[2024·辽宁盘锦辽东湾高中高二期末]如图,一条电路从A处到B处接通时,可以有_____条不同的线路(每条线路仅含一条通路).



第2课时 基本计数原理的应用

【学习目标】

1. 进一步理解和掌握分类加法计数原理与分步乘法计数原理；
2. 能根据具体问题的特征,选择两种计数原理解决一些实际问题.

课前预习

知识导学 素养初识

◆ 知识点 两个计数原理的联系与区别

	分类加法计数原理	分步乘法计数原理
相同点	用来计算完成一件事的方法种数	
不同点	分类完成,类类相加	分步完成,步步相乘
	每类办法中的每一种方法都能独立完成这件事	每步依次完成才算完成这件事
注意点	类类独立,不重不漏	步步相依,步骤完整

课中探究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 组数问题

例1 用0,1,2,3,4,5可以组成多少个无重复数字的:

- (1) 银行存折的四位密码?
- (2) 四位整数?
- (3) 比2000大的四位偶数?

变式 (1)[2024·辽宁盘锦辽东湾高中高二期末]

用0,1,2,3,4,5这六个数字组成没有重复数字的三位数,其中偶数共有 ()

- A. 40个 B. 42个
C. 48个 D. 52个

(2)(多选题)[2024·辽宁丹东高二期末] 下列说法正确的是 ()

- A. 由数字1,2,3,4能够组成24个没有重复数字的三位数
B. 由数字1,2,3,4能够组成16个没有重复数字的三位偶数
C. 由数字1,2,3,4能够组成64个三位密码
D. 由数字1,2,3,4能够组成28个比320大的三位数

[素养小结]

(1)关于组数问题,一般要遵循特殊优先的原则,即特殊位置优先或特殊元素优先.特殊位置如首位或末尾,特殊元素如0、奇数、偶数等,两种特殊择其一即可.

(2)解决组数问题,应特别注意其限制条件,有些条件是隐藏的,要善于挖掘.

◆ 探究点二 抽取(分配)问题

例2 [2023·江西吉安高二期末] 某师范院校为了支持乡村教育振兴计划,拟委派10名大学生到偏远山区支教,其中有3名研究生.现将这10名大学生分配给5所乡村小学,每校2人,则不同的研究生分配情况有_____种(用数字作答).

变式 (1)某公司新聘用8名员工,平均分给甲、乙两个部门,其中2名英语翻译人员不能分给同一个部门,3名电脑编程人员也不能分给同一个部门,则不同的分配方法共有 ()

- A. 18种 B. 24种
C. 36种 D. 72种

(2)某校文创社团近期设计了两款明信片文创作品“油池春军”和“府学春雨”,借此展示该校的文化底蕴和春天美景,一经推出,广受欢迎.为了支持慈善事业,校志愿者社团派出李明和张伟等5人帮助文创社团公益售卖两款明信片,5人分为两组,每组售卖同一款明信片.若李明和张伟必须售卖同一款明信片,且每款明信片至少由2名志愿者售卖,则不同的售卖方案的种数为 ()

A. 8 B. 10 C. 12 D. 14

[素养小结]

求解抽取(分配)问题的方法:

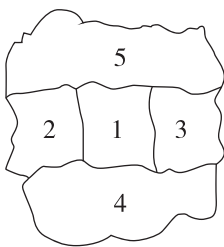
- (1)当涉及对象数目不大时,一般选用列举法、树状图法、框图法或者图表法.
- (2)当涉及对象数目很大时,一般有两种方法:①直接法,直接使用分类加法计数原理或分步乘法计数原理;②间接法,去掉限制条件,计算所有的抽取方法数,然后减去所有不符合条件的抽取方法数即可.

◆ 探究点三 涂色问题

[探索] (1)涂色问题的基本要求是什么?

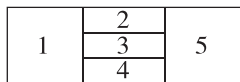
(2)怎样解决涂色问题?

例 3 用四种颜色对图中的区域进行涂色,并保证相邻区域的颜色不同,则共有 _____ 种涂色方法.



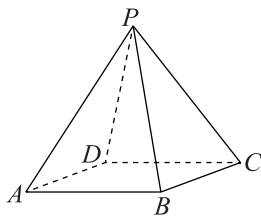
变式 (1) [2024·辽宁锦州高二期末]

在如图所示的五块土地上种植四种庄稼,有五种庄稼秧苗可供选择,要求相邻的土地不种植同一种庄稼,则不同的种植方法共有 ()



- A. 240 种 B. 300 种
C. 360 种 D. 420 种

(2)如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,给 5 个顶点安装彩色灯泡,要求相邻顶点的灯泡不能使用同一颜色,有 4 种不同颜色的灯泡可供选择,则不同的安装方法共有 _____ 种.

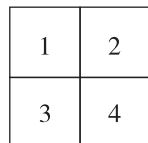


[素养小结]

涂色与种植问题是考查计数方法的一种常见问题,由于这类问题常常涉及分类与分步,所以在高考题中经常出现,处理这类问题的关键是要找准分类标准,求解涂色与种植问题一般是直接利用两个计数原理求解,常用的方法有:

- (1)按区域的不同以区域为主分步计数,并用分步乘法计数原理计算.
- (2)以颜色(种植作物)为主的分类讨论法,适用于“区域、点、线段”问题,用分类加法计数原理计算.
- (3)将空间问题平面化,转化为平面区域的涂色问题.
- (4)对于不相邻的区域,常分为同色和不同色两类,这是常用的分类标准.
- (5)对于相邻不同色的记忆口诀“相邻则递减,不相邻则分类”.

拓展 将红、黄、蓝、白、黑五种颜色涂在如图所示的“田”字形的 4 个小方格内,每格涂一种颜色,相邻两格涂不同的颜色,如果颜色可以反复使用,那么共有多少种不同的涂法?



课堂评价

知识评价 素养形成

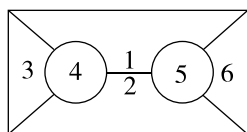
1. 为推动就业与培养有机联动、人才供需有效对接,促进高校毕业生高质量就业,教育部实施供需对接就业育人项目.现安排甲、乙两所高校与三家人用人单位开展项目对接,若每所高校至少对接两家人用人单位,则不同的对接方案共有 ()

- A. 15 种 B. 16 种
C. 17 种 D. 18 种

2. [2024·辽宁辽阳高二期末] 某同学有 4 件不同颜色的衬衣,3 件不同花样的裙子,2 套不同样式的连衣裙.该同学需选择一套服装参加歌舞演出,则不同的选法有 ()

- A. 24 种 B. 10 种
C. 9 种 D. 14 种

3. 某公园设计了如图所示的观赏花坛, 现有郁金香、玛格丽特、小月季、小杜鹃四种不同的花可供选择, 要求相邻区域种不同种类的花, 则不同的种植方案的种数为 ()



A. 24 B. 36 C. 48 D. 96

4. (多选题)[2023·长春高二期末] 高二年级安排甲、乙、丙三名学生到 A, B, C, D, E 五个社区进行暑期社会实践活动, 每名学生只能选择一个社区, 且多个学生可以选择同一个社区, 则下列说法正确的有 ()

- A. 所有可能的安排方法共有 3^5 种
 B. 如果社区 A 必须有学生选择, 则不同的安排方法有 61 种
 C. 如果学生甲必须选择社区 A , 则不同的安排方法有 25 种
 D. 如果甲、乙两名学生必须在同一个社区, 则不同的安排方法有 20 种
 5. 从黄瓜、白菜、油菜、扁豆 4 种蔬菜中选出 3 种, 分别种在三块不同土质的土地上, 其中黄瓜必须种植, 不同的种植方法共有 _____ 种.

3.1.2 排列与排列数

第 1 课时 排列与排列数

【学习目标】

1. 通过实例, 理解排列的概念;
2. 能利用计数原理推导排列数公式;
3. 能用排列数公式进行简单的计算和证明.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 排列及其特征

排列: 一般地, 从 _____ 个不同对象中, 任取 m ($m \leq n$) 个对象, 按照 _____ 排成一列, 称为从 n 个不同对象中取出 m 个对象的一个排列. 特别地, $m = n$ 时的排列(即取出所有对象的排列)称为全排列.

注意点: 互异性、有序性.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1) a, b, c 与 b, a, c 是同一个排列. ()
 (2) 从 4 个不同对象中任意取出 3 个对象, 只要所取得的对象相同, 得到的就是相同的排列. ()
 (3) 在一个排列中, 若交换两个对象的位置, 则该排列不发生变化. ()

◆ 知识点二 排列数与排列数公式

排列数的定义	从 _____ 个不同对象中取出 _____ 个对象的所有排列的个数, 称为从 n 个不同对象中取出 m 个对象的排列数, 用符号 _____ 表示
--------	--

(续表)

排列数的表示		A_n^m ($n \in \mathbf{N}^*, m \in \mathbf{N}, m \leq n$)
排列数公式	乘积式	$A_n^m = \underline{\hspace{2cm}}$
	阶乘式	$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$
阶乘		$A_n^n = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$
规定		$0! = \underline{\hspace{2cm}}, A_n^0 = \underline{\hspace{2cm}}$
性质		$A_n^m + mA_n^{m-1} = \underline{\hspace{2cm}}$

【诊断分析】1. “排列”和“排列数”有什么区别?

2. 排列数的两个公式“ $A_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1)$ ”与“ $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ ”, 什么时候用“连乘积形式”, 什么时候用“阶乘形式”?

◆ 探究点一 排列的概念

例 1 从集合 $\{3, 5, 7, 9, 11\}$ 中任取两个元素,

①相加可得多少个不同的和?

②相除可得多少个不同的商?

③作为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 中的 a, b , 可以得到多少个焦点在 x 轴上的椭圆方程?

④作为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 中的 a, b , 可以得到多少个焦点在 x 轴上的双曲线方程?

上面四个问题属于排列问题的是 ()

- A. ①②③④ B. ②④
C. ②③ D. ①④

变式 判断下列问题是不是排列问题, 并说明理由.

(1) 从甲、乙、丙、丁四名学生中选出两名参加活动, 其中一名学生参加活动 A, 另一名学生参加活动 B;

(2) 从甲、乙、丙、丁四名学生中选出两名参加一项活动;

(3) 从所有互质的三位数中选出两个数求其和;

(4) 从所有互质的三位数中选出两个数求其商;

(5) 高二(1)班有四个空位, 安排从外校转来的三名学生坐这四个空位中的三个.

[素养小结]

判定一个具体问题为排列问题, 一般从两个方面着手:

(1) 研究的对象一定是不同元素, 若完全相同则一定不是排列问题;

(2) 一定要有序, 即顺序不同排列的结果不同, 排列的过程有两个, 首先是“取”, 然后是“排”, 不要将“取”的过程误认为是排列.

◆ 探究点二 用树形图解决排列问题

例 2 (1) 甲、乙、丙三人互相传球, 由甲开始发球, 并作为第一次传球, 经过五次传球后, 球回到甲手中, 则不同的传球方式共有 ()

- A. 5 种 B. 10 种
C. 8 种 D. 16 种

(2) 从 a, b, c, d, e 五个元素中每次取出三个元素, 可组成 _____ 个以 b 为首的不同排列, 它们分别为 _____.

变式 A, B, C, D 四名同学排成一排照相, 要求自左向右 A 不排在第一位, B 不排在第四位, 则共有 _____ 种不同的排列方法.

[素养小结]

在排列个数不多的情况下, 树形图是一种比较有效的表示方式. 在操作中先将元素按一定顺序排出, 然后以先安排哪个元素作为分类标准进行分类, 在每一类中余下的元素在前面元素不变的情况下确定第二个元素, 再按此元素分类, 依次进行, 直到完成一个排列, 这样能不重不漏, 最后按树形图写出所有排列.

◆ 探究点三 排列数公式的应用

例 3 (1) [2023 · 新疆和田高二期末] 已知 $3A_8^x = 4A_9^{x-1}$, 则 $x =$ ()

- A. 6 B. 13
C. 6 或 13 D. 12

(2) 计算: $\frac{2A_8^5 + 7A_8^4}{A_8^8 - A_9^5} =$ _____.

(3) 求证: $A_{n+1}^{n+1} = A_{n+1}^n = (n+1)A_n^n$.

变式 (1)(多选题)[2024·辽宁盘锦辽东湾高中高二月考] 下列等式中正确的是 ()

A. $A_n^3 = (n-2)A_n^2$

B. $\frac{1}{n}A_{n+1}^n = A_{n+1}^{n-1}$

C. $nA_{n-1}^{n-2} = A_n^n$

D. $\frac{n}{n-m}A_{n-1}^m = A_n^m$

(2) 不等式 $A_9^x > 6A_9^{x-2}$ 的解集为 _____.

[素养小结]

(1) 排列数公式的乘积的形式适用于个体计算和当 m 较小时的含排列数的方程和不等式问题.

(2) 排列数公式的阶乘形式主要用于与排列数有关的证明、解方程和不等式等问题, 具体应用时注意阶乘的性质, 提取公因式, 可以简化计算.

(3) 排列数中若有参数, 要注意参数的取值范围.

课堂评价

知识评价 素养形成

1. 从 1, 2, 3, 4 这四个数字中选取三个数字可以组成无重复数字的三位数的个数为 ()

- A. 12 B. 24 C. 30 D. 64

2. 从 2, 3, 5, 7 这四个数中任选两个数做加、减、乘、除运算, 分别计算它们的结果, 在这四种运算中, 可以看作排列问题的有 ()

- A. 1 种 B. 2 种
C. 3 种 D. 4 种

3. [2024·辽宁营口高中高二月考] $(x-2)(x-3)(x-4)\cdots(x-15)(x \in \mathbf{N}^*, x > 15)$ 可表示为 ()

- A. A_{x-2}^{13} B. A_{x-2}^{14} C. A_{x-15}^{13} D. A_{x-15}^{14}

4. 北京、广州、南京、天津 4 个城市相互通航, 有 _____ 种机票. (用数字作答)

5. 计算: $A_9^9 - 71A_7^7 - 7A_6^6 =$ _____.

第 2 课时 排列数的应用

【学习目标】

1. 进一步理解排列的概念, 掌握一些排列问题的常用解题方法;
2. 能应用排列知识解决简单的实际问题.

课前预习

知识导学 素养初识

◆ 知识点 排列数的应用问题

1. 解简单的排列数的应用问题首先必须认真分析题意, 看能否把问题归结为排列问题, 即是否满足排列定义中的三个条件(备取对象互不相同; 取出对象没有重复; 按一定顺序排成一列), 特别是有顺序.

2. 解排列应用题时, 要学会常见条件的应用, 根据条件从对象和位置两个方面入手, 正确运用分类加法计数原理和分步乘法计数原理. 分类时, 要注意各类之间不重复、不遗漏. 分步时, 要注意依次做完各个步骤后, 事情才能完成. 当不符合条件的情况较少时, 也可以采用间接法.

3. 记住一些常见条件的处理方式, 对提高解题能力有很大的帮助.

课中探究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 无限制条件的排列问题

例 1 (1)[2023·山西晋中高二期末] 小明所在的高校开设了篮球、足球、太极拳等 12 门体育选修课, 每名学生需在大一和大二年级分别选择不重复的一门选修课学习, 则小明的体育选修课不同的选择有 ()

- A. 66 种 B. 96 种
C. 132 种 D. 144 种

(2)[2023·江苏扬州高二期末] 8 名学生排成两排, 每排 4 人, 则不同的排法种数为 ()

- A. $A_4^4 + A_4^4$ B. $A_4^4 A_3^3$
C. $A_4^4 A_4^4$ D. A_8^8

变式 (1)[2023·武汉高二期中] 为贯彻文明校园,某中学有 5 名学生志愿者参加文明监督岗工作,若每周值 3 天班,每班 1 人,每人每周最多值 1 天班,则不同的排班种数为 ()

- A. 12 B. 45
C. 60 D. 90

(2)[2023·河北唐山高二期中] 一用户在打电话时忘了号码的最后四位数字,只记得最后四位数字两两不同,且都大于 5,于是他随机拨最后四位数字(两两不同),则不同的拨号方法的种数为 ()

- A. 24 B. 20
C. 18 D. 12

[素养小结]

没有限制条件的排列问题关键在于顺序而不是位置,比如站排问题,无论多少排,都满足全排列.分类加法计数原理和分步乘法计数原理贯穿于所有的排列问题中,具体问题中要能够准确应用.

◆ 探究点二 排队问题

例 2 有 7 名学生,其中 3 名男生、4 名女生,求在下列不同条件下的排法种数.

- (1)选 5 人排成一排;
- (2)全体站成一排,女生互不相邻;
- (3)全体站成一排,其中甲不站在最左边,也不站在最右边;
- (4)全体站成一排,其中甲不站在最左边,乙不站在最右边;
- (5)男生甲、乙、丙三人从左往右依次站好,女生顺序不定;
- (6)站成三排,前排 2 名学生,中间排 3 名学生,后排 2 名学生,其中甲站在中间排的中间位置;
- (7)7 名学生坐圆桌吃饭,其中甲、乙相邻.

变式 (1)[2023·成都树德中学高二月考] A, B, C, D, E 五人站成一排拍照, B, C 不相邻,则不同的排列方式共有 ()

- A. 24 种 B. 48 种
C. 72 种 D. 96 种

(2)[2023·贵阳一中高二月考] 高三年级某班组织元旦晚会,共准备了甲、乙、丙、丁、戊五个节目,出场时要求甲、乙、丙三个节目顺序为“甲、乙、丙”或“丙、乙、甲”(可以不相邻),则这样的出场排序有 ()

- A. 24 种 B. 40 种
C. 60 种 D. 84 种

[素养小结]

(1)对于特殊限制条件的排列问题,要记住其特殊的解决方法,如捆绑法、插空法、除序法等.

(2)限制条件分析时有位置分析法、对象分析法,先特殊(对象或位置)后一般,有多个条件时,先肯定(在某位置)后否定(不在某位置),两条件有影响时,可根据影响先分类再分步进行求解,对于分类过多的问题可以采用间接法.

拓展 (1)某学校筹备元旦晚会节目单时,准备在前五个节目里排三个歌唱节目,一个小品节目以及一个相声节目,若三个歌唱节目最多有两个相邻,则不同的排法总数为 ()

- A. 75 B. 80
C. 84 D. 96

(2)某同学有 7 本不同的书,其中语文书 2 本、英语书 2 本、数学书 3 本.现在该同学把这 7 本书放到书架上排成一排,要求 2 本语文书相邻、2 本英语书相邻、3 本数学书中任意 2 本不相邻,则不同的排法种数为 ()

- A. 12 B. 24
C. 48 D. 720

◆ 探究点三 排数问题

例 3 [2023·山西晋中高二期末] 用 0,1,2,3,4,5 这六个数字可以组成多少个无重复数字的:

- (1) 六位奇数?
- (2) 个位数字不是 5 的六位数?
- (3) 比 400 000 大的六位数?

变式 用 0,1,2,3,4 组成没有重复数字的四位偶数,其中比 1000 大的共有 ()

- A. 56 个 B. 60 个
C. 66 个 D. 72 个

[素养小结]

解数字排列问题常见的解题方法:

- (1)“两优先排法”:特殊元素优先排列;特殊位置优先填充.如“0”不排“首位”.
- (2)“分类讨论法”:按照某一标准将排列分成几类,然后按照分类加法计数原理进行求解.要注意以下两点:一是分类标准必须恰当;二是分类过程要做到不重不漏.
- (3)“排除法”:全排列数减去不符合条件的排列数.
- (4)“位置分析法”:按位置逐步讨论,把要求数字的每个数位排好.

◆ 探究点四 排列的综合应用

例 4 某次训练活动中,海军舰长要求队员们依次完成六项任务,并对任务的顺序提出了如下要求:重点任务 A 必须排在前三位,且任务 E, F 必须相邻,则这六项任务的不同安排方案共有 ()

- A. 240 种 B. 188 种
C. 156 种 D. 120 种

变式 [2024·辽宁丹东高二期末] 某中学进行数学竞赛考试, A, B, C, D, E 共 5 名学生参加比赛, 决出第一名到第五名的名次(没有并列名次). A 和 B 向教练询问比赛结果, 教练对 A 说:“你和 B 都没有得到第一名.”对 B 说:“你不是最后一名.”从这两个回答分析, 5 人的名次排列方式共有 ()

- A. 54 种 B. 72 种
C. 96 种 D. 120 种

[素养小结]

实际问题中,既要能观察出是排列问题,又要能搞清楚哪些是特殊对象,还要根据问题进行合理分类、分步,选择合适的解法.因此需做一定量的排列应用题,逐渐掌握解决问题的基本思路.

课堂评价

知识评价 素养形成

1. [2023·河南驻马店高二期末] A, B, C, D, E 五人站成一排,如果 A, B 必须相邻,那么排法种数为 ()

- A. 24 B. 120 C. 48 D. 60

2. [2023·重庆一中高二月考] 现有 4 男 3 女共 7 个人排成一排照相,其中三个女生不全相邻的排法种数为 ()

- A. $A_5^3 A_5^5$ B. $A_7^7 - A_5^5 A_3^3$
C. $A_4^4 A_5^3$ D. $A_7^7 - A_5^3$

3. [2023·浙江长兴中学高二期中] 某场比赛的三个地点需要志愿者服务,现有甲、乙、丙、丁四人报名参加,每个地点仅需一名志愿者,每人至多在一个地点服务,若甲不能到第一个地点服务,则不同的安排方法共有 ()

- A. 18 种 B. 24 种
C. 32 种 D. 64 种

4. 甲、乙、丙、丁 4 名学生站成一排参加文艺汇演,若甲、乙不能同时站在两端,则不同的排列方式共有 ()

- A. 4 种 B. 8 种
C. 16 种 D. 20 种

5. 身高互不相同的 7 名运动员站成一排,其中甲、乙、丙 3 人自左向右从高到矮排列的不同排法共有 _____ 种.(用数字作答)

3.1.3 组合与组合数

第1课时 组合与组合数及其性质应用

【学习目标】

1. 通过实例,理解组合的概念;
2. 能利用计数原理推导组合数公式;
3. 能利用组合数公式进行简单计算和证明;
4. 会用组合数公式解决一些简单的组合问题.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 组合

定义:一般地,从_____个不同对象中取出 m ($m \leq n$) 个对象_____,称为从 n 个不同对象中取出 m 个对象的一个组合.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1)“ abc ”与“ bca ”是相同的排列. ()
- (2)“ abc ”与“ bca ”是相同的组合. ()

◆ 知识点二 组合数与组合数公式

(1)从 n 个不同对象中取出 m 个对象的所有组合的个数,称为从 n 个不同对象中取出 m 个对象的组合数,用符号_____表示.

$$(2) C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)\cdots[n-(m-1)]}{m \times (m-1) \times \cdots \times 2 \times 1} = \frac{n!}{(n-m)! m!}.$$

(3) 规定: $C_n^0 =$ _____.

注意:

- (1)在符号 C_n^m 中, $m \leq n$, 且 $m \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}^*$;
- (2)组合数公式的展开式分子是从 n 开始 m 个正整数相乘,分母是 m 的阶乘.

【诊断分析】1. 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1)两个组合相同的充要条件是组成组合的对象完全相同. ()
- (2)从 a_1, a_2, a_3 三个不同对象中任取两个对象组成一个组合,所有组合的个数为 C_3^2 . ()
- (3)从 $1, 3, 5, 7$ 中任取两个数相乘可得 C_4^2 个积. ()
- (4)从 $1, 3, 5, 7$ 中任取两个数相除可得 C_4^2 个商. ()

2. 组合数公式的推导方法对我们解题有何启发?

◆ 知识点三 组合数的性质

1. $C_n^m =$ _____.

2. $C_n^{m+1} + C_n^m =$ _____.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1)若 $C_8^m = C_8^{2m-1}$, 则 $m = 1$. ()
- (2) $C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_{n-1}^k + C_n^{k-1}$. ()

课 中 探 究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 对组合概念的理解

例1 给出下列问题:

- (1) a, b, c, d 四支足球队之间进行单循环赛(任意两支足球队之间均比赛一次), 共需比赛多少场?
- (2) a, b, c, d 四支足球队争夺冠、亚军, 有多少种不同的结果?
- (3) 从全班 40 人中选出 3 人分别担任班长、副班长、学习委员三个职务, 有多少种不同的选法?
- (4) 从全班 40 人中选出 3 人参加某项活动, 有多少种不同的选法?
- (5) 平面内有 A, B, C, D, E 共 5 个不同的点, 以其中 2 个点为端点的线段共有多少条?

在上述问题中, 哪些是组合问题? 哪些是排列问题?

变式 解关于正整数 x 的方程:

(1) $C_{16}^{x^2-x} = C_{16}^{5x-5}$;

(2) $C_{x+2}^{x-2} + C_{x+2}^{x-3} = \frac{1}{4}A_{x+3}^3$.

[素养小结]

(1) 性质 $C_n^m = C_n^{n-m}$ 体现了对称性, 具体应用中容易被忽略.

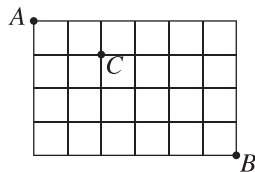
(2) 性质 $C_n^{m+1} + C_n^m = C_{n+1}^{m+1}$ 常常用于化简、求值, 具体应用时要能够构造等式成立的条件.

◆ 探究点四 组合数的应用

例 4 [2023 · 山东滨州高二期中] 高二(1)班共有 35 名学生, 其中男生 20 名, 女生 15 名, 今从中选出 3 名学生参加活动.

- (1) 其中某一女生不能在内, 不同的选法有多少种?
- (2) 恰有 2 名女生在内, 不同的选法有多少种?
- (3) 至少有 2 名女生在内, 不同的选法有多少种?
- (4) 至多有 2 名女生在内, 不同的选法有多少种?

变式 (1) [2023 · 江西抚州一
中高二月考] 在某城市中,
 A, B 两地有如图所示的方格
型道路网, 甲随机沿道路网选
择一条最短路径, 从 A 地出发去往 B 地, 途经 C
地, 则不同的路线有 ()



- A. 90 种
- B. 105 种
- C. 260 种
- D. 315 种

(2) [2024 · 沈阳高二期末] 某冰淇淋店至少需要准备 $m (m \in \mathbb{N}^*)$ 种不同口味的冰淇淋, 才能满足其广告所称“任选 2 种不同口味的冰淇淋的组合数超过 100”. 若来店里的顾客从这 m 种冰淇淋中任选 1 种或 2 种不同口味的冰淇淋, 则不同的选择方法有 ()

- A. 110 种
- B. 115 种
- C. 120 种
- D. 125 种

[素养小结]

1. 求解组合数的应用题的策略:

(1) 解简单的组合应用题时, 首先要判断它是不是组合问题, 组合问题与排列问题的根本区别在于排列问题与取出对象之间的顺序有关, 而组合问题与取出对象之间的顺序无关.

(2) 求解“含”与“不含”问题, 其解法常用直接分步法, 即“含”的先取出, “不含”的可把所指元素去掉再取, 分步计数.

2. “至多”“至少”问题, 其解法常有两种解决思路: 一是直接分类法, 但要注意分类要不重不漏; 二是间接法, 注意找准对立面, 确保不重不漏.

课堂评价

知识评价 素养形成

- 1. 下列四个问题中属于组合问题的是 ()
- A. 从 4 名志愿者中选出 2 名分别参加导游和翻译的工作
- B. 从 0, 1, 2, 3, 4 这 5 个数字中选取 3 个不同的数字组成一个三位数
- C. 从某班 40 名学生中选 5 名组成学习小组
- D. 老师在排座位时, 将甲、乙两人安排为同桌

2. $\frac{7!}{C_7^6 \times 4!} =$ ()

- A. 15
- B. 30
- C. 35
- D. 42

3. [2023 · 黑龙江大兴安岭实验中学高二月考] 若 $A_n^3 = 12C_n^2$, 则 $n =$ _____.

4. 将 10 人分成甲、乙两组, 其中甲组 4 人, 乙组 6 人, 则不同的分组方法的种数为 _____ (用数字作答)

第2课时 组合数的综合应用

【学习目标】

1. 掌握具有限制条件的组合和排列综合问题的解决方法；
2. 理解相同元素和不同元素的分组分配问题.

课前预习

知识导学 素养初识

◆ 知识点 组合数的应用问题

1. “分组”与“分配”问题的解法:

(1) 分组问题属于“组合”问题, 常见的分组问题有三种:

- ① 完全均匀分组, 每组的对象个数均相等, 共分为 m 组, 最后必须除以 $m!$;
- ② 部分均匀分组, 应注意不要重复, 若有 n 组对象是均匀分组, 最后必须除以 $n!$;
- ③ 完全非均匀分组.

(2) 分配问题属于“排列”问题, 分配问题可以按要求逐个分配, 也可以分组后再分配.

2. 排列与组合的综合应用问题的解法:

- (1) 审清题意, 区分哪是排列, 哪是组合;
- (2) 往往综合问题会有多个限制条件, 应认真分析确定分类还是分步;
- (3) 先取后排是解决综合问题的基本顺序.

课中探究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 不同元素的分组、分配问题

例 1 按下列要求分配 6 本不同的书, 各有多少种不同的分配方法?

- (1) 分成 3 份, 1 份 1 本, 1 份 2 本, 1 份 3 本;
- (2) 甲、乙、丙 3 人中, 1 人得 1 本, 1 人得 2 本, 1 人得 3 本;
- (3) 平均分成 3 份, 每份 2 本;
- (4) 平均分配给甲、乙、丙 3 人, 每人 2 本;
- (5) 分成 3 份, 1 份 4 本, 另外 2 份每份 1 本;
- (6) 甲、乙、丙 3 人中, 1 人得 4 本, 另外 2 人每人得 1 本;
- (7) 甲得 1 本, 乙得 1 本, 丙得 4 本;
- (8) 甲、乙、丙 3 人中, 每人至少得 1 本.

变式 (1) 现有 6 个不同的生肖吉祥物, 分 1 个给老师, 其他 5 个分给 3 位学生, 每位学生至少分到 1 个, 则这 6 个生肖吉祥物的分配方法共有 ()

- A. 360 种 B. 900 种
C. 720 种 D. 1800 种

(2) 将 4 名医生, 3 名护士分配到 3 个社区对居民进行健康体检, 要求每个社区至少有 1 名医生和 1 名护士, 则不同的分配方法共有 ()

- A. 64 种 B. 108 种
C. 128 种 D. 216 种

[素养小结]

1. 分配问题有两类, 一是将物直接分配给人, 即直接分配问题; 二是先分组再将组分配给人, 即间接分配.

(1) 直接分配问题主要是明确分配的数量, 即具体到具体人的数量, 例如甲得 2 本书, 乙得 3 本书, 此类问题主要是应用组合知识进行直接求解.

(2) 间接分配问题一般是未明确分配的数量, 即不知道具体分配的数量, 例如甲、乙、丙其中 1 人得一本书, 1 人得 2 本书, 1 人得 3 本书, 此类问题一般是先分组再将组全排列分配给人.

2. 分组问题分为平均分、部分平均分、均未平均分三类题型. 平均分就是明确数量问题, 直接应用组合即可解决; 部分平均分若有 m 个组平均分, 则需除以 $m!$; 若均未平均分, 则不需要除以任何数值, 即为组合数即可.

◆ 探究点二 相同元素的分配(组)问题

例 2 将 20 个完全相同的球放入编号为 1, 2, 3, 4, 5 的五个盒子中.

- (1) 若每个盒子至少有一个球, 则一共有多少种放法?
- (2) 若每个盒子可放任意个球, 则一共有多少种放法?
- (3) 若要求每个盒子放的球的个数不小于其编号数, 则一共有多少种放法?

变式 [2024·广东深圳高二期末] 6 名研究人员在三个不同的无菌研究舱同时进行工作, 每名研究人员必须去一个舱, 且每个舱至少去 1 人, 由于空间限制, 每个舱至多容纳 3 人, 则不同的安排方案共有 ()

- A. 720 种 B. 450 种
C. 360 种 D. 180 种

[素养小结]

隔板法: 如果将放有小球的盒子紧挨着成一行放置, 便可看作排成一行的小球的空隙中插入了若干隔板, 相邻两块隔板形成一个“盒”. 每一种插入隔板的方法对应着小球放入盒子的一种方法, 此法称为隔板法.

(1) 应用隔板法常用的条件是: 一是解决相同元素的分配问题; 二是可以转化为“至少有一个”的问题.

(2) 基本题型: 将 n 个相同的元素分给 m 个不同的对象 ($n \geq m$).

- ① 每个对象至少有一个元素, 则有 C_{n-1}^{m-1} 种方法. 可描述为 $n-1$ 个空中插入 $m-1$ 个隔板;
- ② 每个对象可以有 0 个元素, 则将 m 个不同对象作为 m 个相同元素, 此时共有 $m+n$ 个相同元素, 则有 C_{n+m-1}^{m-1} 种方法;
- ③ 每个对象可以有多个元素, 则可先为 m 个不同的对象分配一些元素, 保证满足条件“至少有一个”后, 再应用基本方法进行求解.

◆ 探究点三 排列、组合的综合应用

例 3 某校拟举办“祖国, 你好”的诗歌朗诵比赛. 该校高三年级准备从包括甲、乙、丙在内的 7 名学生中选派 4 名学生参加, 要求甲、乙、丙这 3 名学生中至少有 1 人参加, 且当这 3 名学生都参加时, 甲和乙的朗诵顺序不能相邻, 那么选派的 4 名学生不同的朗诵顺序情况的种数为 ()

- A. 720 B. 768
C. 810 D. 816

变式 [2024·福建泉州高二期末] 某学校举办运动会, 径赛类共设 100 米、200 米、400 米、800 米、1500 米 5 个项目, 田赛类共设铅球、跳高、跳远、三级跳远 4 个项目. 现甲、乙两名学生均选择一个径赛类项目和一个田赛类项目参赛, 则甲、乙的参赛项目有且只有一个相同的方法种数为 ()

- A. 70 B. 140
C. 252 D. 504

[素养小结]

对于排列组合的综合题目, 一般是先取出符合要求的对象组合(分组), 再对取出的对象排列, “先取”按被取对象的类别进行分解, “后排”按特殊对象(位置)进行分解.

课堂评价

知识评价 素养形成

1. “中国梦”的英文翻译为“China Dream”, 其中 China 又可以简写为 CN, 从“CN Dream”中取 6 个不同的字母排成一排, 则含有“ea”这个字母组合(相邻且顺序不变)的不同排法共有 ()

- A. 360 种 B. 480 种
C. 600 种 D. 720 种

2. [2024·辽宁丹东高二期末] 有 5 名学生到 4 个场馆做志愿者, 每名学生只去 1 个场馆, 每个场馆至少安排 1 名学生, 则不同的安排方法共有 ()

- A. 60 种 B. 120 种
C. 240 种 D. 480 种

3. [2024·哈尔滨三中高二期末] 某地突发洪水, 当地政府组织抗洪救灾活动, 现有 7 辆相同的

车派往 3 个不同的地方, 每个地方至少派往一辆车, 则不同派法的种数为 ()

- A. 20 B. 15 C. 12 D. 10

4. [2023·上海大同中学高二月考] 某中学为迎接即将到来的元宵节筹备了 3 款灯谜, 现准备将其印制在 5 个不同的灯笼上, 若每个灯谜都必须印制, 且每个灯笼仅印制 1 款灯谜, 则不同的分配方案共有 _____ 种.

3.2 数学探究活动: 生日悖论的解释与模拟

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 一、生日悖论

在不少于 23 个人的人群中至少有两个人生日相同的概率大于 _____, 在一个 30 人的班级中, 至少有两个人生日相同的概率约为 _____, 当人数达到 41 时, 这种概率就超过 _____ 了! 这一结论与人们的直觉相差比较远, 因此常被称为 _____.

◆ 二、生日问题的求解

$n(n \in \mathbf{N}^*, n \leq 365)$ 个人中至少有两个人生日相同的概率 P 有多大呢?

假设一年中有 365 天, 则 $n(n \in \mathbf{N}^*, n \leq 365)$ 个人的生日都不相同的概率为

$$\frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \cdots \times$$

$$\frac{365-n+1}{365} = \frac{365!}{365^n (365-n)!}, \text{ 那么 } n(n \in \mathbf{N}^*, n \leq$$

365) 个人中至少有两个人生日相同的概率 $P =$

$$1 - \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \cdots \times \frac{365-n+1}{365} =$$

$$1 - \frac{365!}{365^n (365-n)!}.$$

将 n 与 P 的关系列入下表:

n	23	30	40	50	60	100
P	50.7%	70.6%	89.1%	97.0%	99.4%	$1 - 3.07 \times 10^{-7}$

◆ 三、与某个人同一天生日的概率

假设一年中有 365 天, 现有 n 个人, 那么这 n 个人中至少有 1 个人与你生日相同的概率为 $1 -$

$$\left(\frac{364}{365}\right)^n.$$

当 $n=253$ 时, 这 n 个人中至少有 1 个人与你生日相同的概率约为 50%, 当 $n=587$ 时, 这 n 个人中至少有 1 个人与你生日相同的概率约为 80%. 很明显这个问题与“生日悖论”并不是一个问题.

◆ 四、检验“生日悖论”实例

1. 问题的提出

有一天, 同学小张、小王和小徐一起去游乐场玩耍, 小张看到游乐场里大约有 50 人, 就对小王和小徐说: “咱们打个赌, 我敢说游乐场里肯定有生日相同的人.” 小王和小徐都不接受小张的说法, 认为生日相同的可能性太小了. 游乐场里的人都正在玩, 要去调查现在的这些人会打扰到大家, 小张建议通过调查自己所在班级里同学的生日情况来验证自己的说法.

2. 获取样本数据

小张、小王和小徐分工去调查自己所在班级共 50 名同学的生日, 日期用数字表示, 如 3 月 5 日记为 0305, 通过调查, 获取的数据如下:

小张获取的 15 位同学的生日为: 1227 0111
1226 1213 1230 0827 0508 1209 0712
1203 0324 0905 1227 1123 1102;

小王获取的 17 位同学的生日为:0122 0622
0227 0807 0412 0108 0825 1107 1031
0219 0117 0503 0606 0113 0920 0415
1105;

小徐获取的 18 位同学的生日为:0102 1203
0826 0928 0122 0316 1121 0727 0121
0111 1229 1114 1118 0325 0607 0916
1112 0128.

3. 验证结果

◆ 五、生日悖论的解释与模拟活动记录表

活动开始时间: _____

(1)成员与分工	
姓名	分工
小张	负责班级 15 位同学的生日调查
小王	负责班级 17 位同学的生日调查
小徐	负责班级 18 位同学的生日调查
(2)验证生日悖论的实际数据	
①在班级的 50 人中居然有四对同学的生日是同一天,分别是 1227,0111,0122,1203;	
②小张的生日是 0508,但是其他 49 人中没有 1 人 and 小张有相同的生日	
(3) $n(n \in \mathbf{N}^*, n \leq 365)$ 个人中至少有两个人生日相同的概率 $P = 1 - \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \dots \times \frac{365-n+1}{365} = 1 - \frac{365!}{365^n (365-n)!}$	
(4) m 个人中至少有一个人的生日是指定日期的概率 $P = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^m$	
(5)活动总结	
当人群的人数达到 23 时,至少有两个人生日相同的概率就超过了 50%,而当人数达到 50 时,至少有两个人生日相同的概率约为 97.0%.要想在一群人中出现和自己一天生日的人的概率达到 80%,那么人群的人数就要接近 600 了	

活动结束时间: _____

假定人在一年 365 天中的任一天出生的概率是一样的,某班级有 60 名同学,则至少有 2 名同学的生日相同的概率约为多少?